Journal of Number Theory **91**, 293–296 (2001)
doi:10.1006/jnth.2001.2677, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

R-équivalence simultanée de torseurs: un complément à l'article de P. Gille

Laurent Moret-Bailly[1]

Institut de Recherche Mathématique de Rennes, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France
E-mail: moret@univ-rennes1.fr
URL: http://www.maths.univ-rennes1.fr/~moret/

Communicated by J.-L. Colliot-Thélène

Received February 22, 2001

répond notamment à une question de P. Gille (2001, *J. Number Theory* **91**, 284–292). Les énoncés sont ensuite reformulés en termes de R-équivalence de points rationnels sur les variétés de la forme $GL_{r,K}/G$. © 2001 Elsevier Science

If K is a "large" field and G is a finite group, we show that any finite family of R-equivalent G-torsors over K is obtained by specialization from a geometrically irreducible G-torsor over an open subset of $\mathbb{P}^1_K$. This answers a question of P. Gille (2001, *J. Number Theory* **91**, 284–292). The results are also stated in terms of R-equivalence of rational points on varieties of the form $GL_{r,K}/G$. © 2001 Elsevier Science

Si K est un corps local non archimédien, à corps résiduel fini, et si G est un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique résiduelle de K, alors P. Gille montre dans [Gi] que tout G-torseur X sur K est R-équivalent au torseur trivial, et demande si deux G-torseurs quelconques sont élémentairement R-équivalents, i.e. proviennent par spécialisation d'un G-torseur sur un ouvert de $\mathbb{P}^1_K$. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, et que l'on obtient même ainsi tous les G-torseurs simultanément:

Théorème 1. *Soit K un corps local non archimédien, à corps résiduel fini de caractéristique p, et soit G un groupe fini d'ordre non divisible par p. Alors*

[1] L'auteur est membre du réseau européen «Arithmetic Algebraic Geometry» (contrat HPRN-CT-2000-00120).

0022-314X/01 $35.00

il existe un ouvert U de $\mathbb{P}^1_K$ et un G-torseur $V \to U$, avec V géométriquement irréductible sur K, tels que l'application naturelle

$$U(K) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G)$$

déduite de V soit surjective.

De façon plus générale, un corps K est dit *fertile* si, pour tout K-schéma lisse connexe X, l'ensemble $X(K)$ est vide ou dense dans X. Cette notion a été introduite par F. Pop sous le nom de «large field»; voir [CT] et [MB] pour des exemples et des applications. Il est immédiat que, sous les hypothèses du théorème 1, K est fertile; d'autre part $\mathrm{H}^1(K, G)$ est fini. Compte tenu du théorème 1 de [Gi], cité plus haut, notre théorème résulte donc du

THÉORÈME 2. *Soient K un corps fertile, G un K-schéma en groupes fini étale, $n \in \mathbb{N}$, et $X_1, \ldots, X_n$ des G-torseurs sur K qui sont R-équivalents entre eux. Alors il existe un ouvert U de $\mathbb{P}^1_K$, un G_U-torseur $f: V \to U$, où V est* géométriquement irréductible *sur K, et des points rationnels $x_1, \ldots, x_n \in U(K)$ tels que, pour chaque i, le G-torseur X_i soit isomorphe à $f^{-1}(x_i)$.*

Démonstration. Quitte à augmenter n on peut supposer que, pour chaque $i \leqslant n-1$, les torseurs X_i et X_{i+1} sont élémentairement R-équivalents: il existe donc un G-revêtement (ramifié) $f_i: C_i \to \Gamma_i = \mathbb{P}^1_K$ induisant X_i en 0 et X_{i+1} en ∞, où C_i est une K-courbe projective normale et génériquement lisse. De plus, d'après [MB], théorème 1.1 (ou [CT], Theorem 1, si K est de caractéristique nulle et G constant), on sait qu'il existe $f_n: C_n \to \mathbb{P}^1_K$ induisant X_n en 0, avec C_n lisse géométriquement irréductible. On construit alors une courbe Γ_0 de genre 0 à singularités ordinaires en identifiant le point ∞ de Γ_i au point 0 de Γ_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, et un G-revêtement $f_0: C_0 \to \Gamma_0$ par recollement des C_i (via les isomorphismes $f_i^{-1}(\infty) \xleftarrow{\sim} X_{i+1} \xrightarrow{\sim} f_{i+1}^{-1}(0)$). Noter que chaque X_i apparaît comme fibre de f_0 en un point *lisse* $\varepsilon_i \in \Gamma_0(K)$ (il apparaît une infinité de fois comme fibre de f_i, puisque K est fertile). De plus C_0 est géométriquement connexe puisque sa composante C_n l'est, et qu'elle est connectée à toutes les autres.

Par déformation on construit alors un diagramme, à carré commutatif, de K-schémas réduits de type fini

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{V} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{\mathscr{U}}"] & \mathscr{C} \arrow[d, "f"] \\
\mathscr{U} \arrow[r, hook] & \Gamma \arrow[d] \\
& s \in S \arrow[ul, "e_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel:

(i) S est une courbe affine lisse connexe sur K, et $s \in S(K)$;

(ii) Γ et $\mathscr{C}$ sont des S-courbes projectives et plates, et f est un morphisme fini et plat;

(iii) G opère sur $\mathscr{C}$ par Γ-automorphismes;

(iv) le K-morphisme $f_s\colon \mathscr{C}_s \to \Gamma_s$ est isomorphe (avec l'action de G) à $f_0\colon C_0 \to \Gamma_0$ construit ci-dessus;

(v) $\mathscr{U}$ est un ouvert de Γ dense dans chaque fibre;

(vi) $\mathscr{V} = f^{-1}(\mathscr{U})$, et $\mathscr{V}$ est un G-torseur au-dessus de $\mathscr{U}$;

(vii) Γ est lisse au-dessus de $S - \{s\}$;

(viii) les e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des sections de $\mathscr{U}$ sur S, et $e_i(s) = \varepsilon_i$;

(ix) si x est un point singulier de $\mathscr{C}_s$, le schéma Spec $(\mathscr{O}_{\mathscr{C},x}) - \{x\}$ est régulier.

Pour cela on procède d'abord comme dans [MB], Sect. 5 (reposant sur les résultats de [H-S]) pour obtenir un diagramme similaire où S est remplacé par Spec $K[[t]]$; on invoque ensuite le théorème d'approximation d'Artin, comme dans le théorème 2.7 de [MB]. Comme le lecteur le constatera, la seule différence—qui n'affecte pas la construction—avec la situation de [MB] est qu'ici les courbes normales C_i ne sont pas nécessairement lisses aux points de ramification de f_0, de sorte que C_0 n'est pas une «courbe nodale» au sens de *loc. cit.*

Les conditions ci-dessus impliquent que les fibres de Γ sur $S - \{s\}$ sont des droites projectives (elles sont de genre 0 et ont un point rationnel) et que celles de $\mathscr{C}$ sont géométriquement connexes (puisque C_0 l'est). De plus la condition (ix) s'étend à tous les points fermés x de $\mathscr{C}_s$: en effet, si x est un point régulier dans $\mathscr{C}_s$, alors $\mathscr{C}_s$ induit au voisinage de x un diviseur de Cartier régulier, donc x est un point régulier de $\mathscr{C}$. Il en résulte que la fibre générique de $\mathscr{C}$ sur S est *régulière*, et donc *géométriquement irréductible*: elle est irréductible puisque connexe et régulière, et elle conserve ces propriétés par extension séparable du corps de base, ce qui suffit. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer que les fibres de $\mathscr{C}$, sauf $\mathscr{C}_s$, sont géométriquement irréductibles. En particulier, pour tout $t \in S(K)$ distinct de s, $\mathscr{V}_t$ est géométriquement irréductible sur K (et lisse, car étale sur $\mathscr{U}_t$).

Pour chaque i on dispose, par restriction de f à la section e_i, d'un G-torseur $T_i \to S$ qui induit X_i au point s. Comme K est fertile il existe donc $t \in S(K)$, distinct de s, tel que pour chaque i la fibre de T_i en t soit isomorphe à X_i. Le G-torseur $\mathscr{V}_t \to \mathscr{U}_t$ répond à la question. ∎

Les corollaires suivants nous ont été signalés par Jean-Louis Colliot-Thélène; le premier n'est qu'une reformulation du théorème 1 en termes de R-équivalence sur certains espaces homogènes:

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème* 1, *soient* $r \in \mathbb{N}$ *et* $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_{r,K}$ *un morphisme injectif. Notons* X *le* K*-schéma quotient* $\mathrm{GL}_{r,K}/G$. *Alors il existe une courbe (affine)* K*-rationnelle* $U \subset X$ *telle que l'application*

$$\mathrm{GL}_r(K) \times U(K) \to X(K)$$

déduite de l'action de $\mathrm{GL}_{r,K}$ *sur* X *soit surjective.* ∎

Sur les corps fertiles, on déduit du théorème 2 un énoncé de «R-équivalence élémentaire simultanée» dans les espaces homogènes de la forme GL_r/G:

COROLLAIRE 2. *Soient* K *un corps fertile,* n *et* $r \in \mathbb{N}$, *et* G *un sous-groupe fini étale de* $\mathrm{GL}_{r,K}$. *Notons* X *le* K*-schéma quotient* $\mathrm{GL}_{r,K}/G$. *Soient* $P_1, \ldots, P_n \in X(K)$. *Supposons que* $P_1, \ldots, P_n$ *soient R-équivalents dans* X. *Alors il existe un ouvert* U *de* $\mathbb{P}^1_K$ *et un morphisme* $\varphi: U \to X$ *tels que tous les* P_i *appartiennent à* $\varphi(U(K))$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si T est un K-schéma, la donnée d'un élément de $X(T)$ équivaut à celle (à isomorphisme près) d'un G-torseur $T' \to T$ muni d'une trivialisation du $\mathrm{GL}_{r,T}$-torseur $T' \times^G \mathrm{GL}_r$.

Les données fournissent donc en particulier des G-torseurs $X_1, \ldots, X_n$ sur K, qui sont R-équivalents vu l'hypothèse sur les P_i. Le théorème 2 fournit donc un G-torseur V sur un ouvert U de $\mathbb{P}^1_K$, induisant les X_i en des points Q_i de $\mathbb{P}^1(K)$. Le $\mathrm{GL}_{r,U}$-torseur $W := V \times^G \mathrm{GL}_r \to U$ est en outre muni d'un point rationnel R_i au-dessus de chaque Q_i, et le problème consiste simplement à trouver, quitte à restreindre U, une section de W passant par les R_i, ce qui est élémentaire puisque W est trivial sur l'anneau semi-local des Q_i et que $\mathrm{GL}_{r,K}$ est un ouvert d'espace affine. ∎

L'auteur remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Philippe Gille pour leurs remarques.

RÉFÉRENCES

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, Rational connectedness and Galois covers of the projective line, *Ann. of Math.* **151** (2000), 359–373.

[Gi] P. Gille, *R*-équivalence sur les *G*-revêtements sur les corps locaux non archimédiens, *J. Number Theory* **91** (2001), 284–292.

[H-S] D. Harbater et K. F. Stevenson, Patching and thickening problems, *J. Algebra* **212** (1999), 272–304.

[MB] L. Moret-Bailly, Construction de revêtements de courbes pointées, *J. Algebra* **240** (2001), 505–534.